江西师范大学2018年硕士研究生入学考试试题（B卷）

适用专业：070100数学　科目名称：高等代数 847

注：考生答题时，请写在考点下发的答题纸上，写在本试题纸或其他答题纸上的一律无效。

（本试题共 2 页）

一、填空题（每小题 **6** 分，共 **48** 分）

1、设A是数域P上秩为**2**的**3**级矩阵，α和β是非齐次线性方程组$Ax=b$的两个不相同的解，那么$Ax=b$的所有解为__________.

2、当a,b取值分别为________时，多项式$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$有重根为**1.**

3、如果n维列向量$\alpha=(1,1,\cdots,1)'$是矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$属于特征值2的特征向量，那么$\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}=$__________.

4、设A是一个$k\times n$实数矩阵，如果对任意非零n维实数列向量x，都有$x'A'Ax>0$，那么A的秩为__________.

5、 复数域上的所有n级对称矩阵，按合同分类一共可分为__________类.

6、设A是$n(n\geq 2)$级矩阵，且$|A|=0$，那么A的伴随矩阵A^*的秩为________.

7、设V是数域P上所有迹为零的n级方阵按矩阵加法和数乘构成的线性空间，则V的维数等于__________.

8、如果4×4矩阵A的特征多项式$|xE-A|=(x-2)^3(x+3)$，而最小多项式为$(x-2)^2(x+3)$，那么A的相似$Jordan$标准形为______________.

二、（**17** 分）试求n级矩阵$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$的秩.

三、（**17** 分）证明：$x^n-1|x^m-1 \Leftrightarrow n|m$　$(n,m$为正整数$)$

四、（17 分）设V是数域P上n维线性空间，$\mathcal{A}$是V上线性变换，若有向量$\alpha\in V$，$\lambda\in P$，使得$(\mathcal{A}-\lambda\varepsilon)^n\alpha=0$，但$(\mathcal{A}-\lambda\varepsilon)^{n-1}\alpha\neq 0$，$\varepsilon$为恒等变换，则可适当选取$V$的一组基，$\mathcal{A}$在此基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

五、（17 分）设V是复数域上的n维线性空间，$\mathcal{A},\mathcal{B}$是V的线性变换，且$\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}\mathcal{A}$，证明

1） 如果λ是$\mathcal{A}$的一特征值，那么$\mathcal{A}$的特征子空间V_λ是$\mathcal{B}$的不变子空间；

2） 存在复数μ，以及V中非零向量ξ，使得$\mathcal{A}\xi=\lambda\xi,\mathcal{B}\xi=\mu\xi$

六、（17 分）设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s>1)$是齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系，

证明：$\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_s,\beta_s=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{s-1}$也是方程组$Ax=0$的一个基础解系.

七、（17 分）设$\mathcal{A}$是欧式空间V中的对称线性变换，即对任意$\alpha,\beta\in V$，有

$$(\mathcal{A}\alpha,\beta)=(\alpha,\mathcal{A}\beta)$$

证明：1）$\mathcal{A}$的不变子空间的正交补$W^\perp$也是$\mathcal{A}$的不变子空间；

2）$\mathcal{A}$的属于不同特征值的特征向量必定正交；

3）$\mathcal{A}$在任意标准正交基下的矩阵是对称矩阵.