

华南理工大学
2018 年攻读硕士学位研究生入学考试试卷

(试卷上做答无效, 请在答题纸上做答, 试后本卷必须与答题纸一同交回)

科目名称: 系统工程基础综合

适用专业: 控制科学与工程

共 3 页

一、(21 分) 求解微分方程:

1. $(x+3y)dx - (3x-y)dy = 0$

2. $\frac{dy}{dx} = 1 + 2x + y^2 + 2xy^2$

3. $y' = \cos(x+y)$

二、(18 分) 考虑微分方程组

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1. 求该微分方程组的通解;

2. 求当 $t \rightarrow +\infty$ 时极限为零的解。

三、(18 分) 设方程为

$$y''' - y'' - 2y' = \sin 2x$$

求该方程的通解。

四、(18分) 设 $c > 0$ 为常数, 考虑如下微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (1-x)x \\ x(t_0) = c \end{cases}$$

1. 求该问题的解 $x(t)$;
2. 证明, 当 $c \neq 1$ 时, $\frac{dx}{dt} \neq 0$ 。

五、(20分) 按要求做下列各题:

1. 从 1, 2, 3, 4 中任取一个数, 记为 x , 再从 1, \dots , x 中任取一个数, 记为 y , 试求 $P\{y=2\}$ 的值。

2. 假设 A 、 B 、 C 在同一办公室工作, 房间有三部电话。已知, 打给 A 、 B 、 C 电话的概率分别为 $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{5}$ 。他们三人常因工作外出, 其概率分别为 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ 。设三人的行动互为独立, 试求:

- (1) 无人接电话的概率;
- (2) 被呼叫人在办公室的概率。

六、(15分) 由统计物理学知, 分子运动速度的绝对值 X 服从 Maxwell 分布, 其概率密度为:

$$f(x) = \begin{cases} Ax^2 e^{-\frac{x^2}{b}} & x > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中, $b = m/(2kT)$, k 为 Boltmann 常数, T 为绝对温度, m 为分子质量。试确定常数 A 。

七、(20分) 已知连续型随机变量 ξ 的概率密度函数为:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x+2x-1}$$

求 ξ 的数学期望 $E(\xi)$ 和方差 $D(\xi)$ 。

八、(20分) 设独立随机变量序列 $\{\xi_n\}$ 满足中心极限定理条件, 试证明 $\{\xi_n\}$ 满足大数定律的充分必要条件是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D(\xi_k) = 0$$

其中, $D(\xi_n)$ 表示随机变量 ξ_n 的方差。