中 山 大 学

2017 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目代码：678

科目名称：数学分析与高等代数

考试时间：2016 年 12 月 25 日 上午

考 生 须 知

全部答案一律写在答题纸上，答在试题纸上的不计分!答题要写清题号，不必抄题。

一、数学分析 （共 150 分）

1. (每小题 15 分，共 60 分) 计算下列各题：

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$.

(2) 已知 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int f^{-1}(x)\,dx$. 其中 $f^{-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的反函数.

(3) 计算 $\iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|\pi^2\le x^2+y^2\le 4\pi^2\right\}$.

(4) 计算 $I=\int_L (x^2-y)dx+(y^2-x)dy$，其中 L 是沿逆时针方向以原点为中心、a 为半径的上半圆周.

2. (15 分) 求由曲线 $xy=4$， $xy=8$， $xy^3=5$ 和 $xy^3=15$ 所围成的第一象限部分的闭区域 D 的面积.

3. (15 分) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

4. (20 分) 已知 $f(x,y)=(x-6)(y+8)$，求 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的最大方向导数 $g(x,y)$，并求 $g(x,y)$ 在 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$ 上的最大、最小值.

5. (20 分) 将函数 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ $(0\le x\le\pi)$ 分别展开成正弦级数和余弦级数.

6. (20 分)若函数 $y=f(x)$ 在[0, 1]上二阶可导，且满足条件：

$$f''(x)+x^2(f'(x))^3-2f(x)=0 \text{ 及 } f(0)=f(1)=0.$$

证明：函数 $y=f(x)$ 在[0, 1]上恒为零.

二、高等代数（共 150 分）

1. (15 分) 求行列式 $\begin{vmatrix} x+a & b & c & d \\ a & x+b & c & d \\ a & b & x+c & d \\ a & b & c & x+d \end{vmatrix}$ 的值.

2. (15 分) 已知 3 元非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的两个解为 $\alpha=(1,0,2)^T$，$\beta=(1,-1,3)^T$，且系数矩阵 A 的秩 $R(A)=2$，求此方程组的通解.

3. (15 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1)$，$C=2A-B$，已知 A 的行列式 $|A|=1$，求 C 的行列式 $|C|$.

4. (15 分) 设向量 $\alpha_1=(1,-2,4)^T$，$\alpha_2=(0,1,2)^T$，$\alpha_3=(-2,3,c)^T$，试问：

（1）c 取何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关？

（2）c 取何值时，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关？

5. (15 分)设矩阵 A 可逆，证明其伴随矩阵 A^* 也可逆，且 $(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$.

6. (15 分)由 $a_1=(1,1,0,0)^T$，$a_2=(1,0,1,1)^T$ 所生成的向量空间记作 L_1，由 $b_1=(2,-1,3,3)^T$，$b_2=(0,1,-1,-1)^T$ 所生成的向量空间记作 L_2，试证 $L_1=L_2$.

7. (20 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^{100}.

8. (20 分) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$ 可通过正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化为 $f=y_2^2+2y_3^2$，求 a，b.

9. (20 分) 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$a_1\neq 0$，$A=\alpha\alpha^T$.

（1）证明 $\lambda=0$ 是 A 的 $n-1$ 重特征值；

（2）求 A 的非零特征值及相应于特征值的一个特征向量.